Лабораторная работа №3

**Задача 1. Слово Фибоначчи**

**Строками Фибоначчи** (англ. *Fibostring*) называются строки над алфавитом Σ={x,y}, полученные последовательным применением морфизма h:

* h(x)=xy
* h(y)=x

к строке s=y, т. е. последовательность fn(x,y)=hn(y).

**Примеры**:

* f0=y
* f1=x
* f2=xy
* f3=xyx
* f4=xyxxy
* f5=xyxxyxyx

*Лемма 1*. Строки Фибоначчи удовлетворяют рекуррентному соотношению fn=fn−1fn−2, n⩾2.

*Лемма 2*. Для любого целого k⩾0 выполняется fn=fn−k(fk+1,fk).

Например: f7=f5(f3,f2)=(xyx)(xy)(xyx)(xyx)(xy)(xyx)(xy)(xyx).

*Лемма 3*. Для любого целого n⩾2 выполняется равенство f^2n=fn+1fn−2.

*Лемма 4*. Для любого целого n⩾3 строка fn имеет грани fi для i=n−2,n−4,…,2−(n mod 2).

**Обратный морфизм** h−1 определяется как отображение:

* h−1(xy)=x,
* h−1(x)=

Здесь означает, что после этого вхождения x в строке опять следует x.

Обратный морфизм позволяет из строки fn получить строку fn−1.

**Пример**:

f4=xyxxy.

Будем последовательно применять морфизм:

Префикс xy переходит в x, центральный x переходит в y, а суффикс xy также переходит в x.

Получили xyx=f3.

**Задание:**

1. Написать программу генерации строки fn по заданному n.
2. Написать программу генерации по строке fn строки fn-1.
3. Привести тестовые данные
4. Методом математической индукции доказать Лемму 1.

**Задача 2. Слово Туэ-Морса**

Определим последовательность строк Tn над двухбуквенным алфавитом {a,b} следующим образом: Tn=t0t1…t2n−1, где:

* ti=a, если двоичная запись числа i содержит чётное число единиц
* ti=b, иначе.

Строки этой последовательности называются **строками Туэ-Морса** (англ. *Thue–Morse sequence*).

**Примеры**:

* T0=a
* T1=ab
* T2=abba
* T3=abbabaab
* T4=abbabaabbaababba

**Свойство о получении следующей строки**

Как видно из определения, символ на i-ой позиции не зависит от номера строки. Так как длина строк возрастает, каждая строка является собственным префиксом следующей, поэтому можно рассматривать получение следующей строки как приписывание к текущей строке некоторой другой строки.

Теорема: Пусть φ — морфизм, инвертирующий символы:

тогда для строк Туэ-Морса верно следующее соотношение: Tn+1=Tnφ(Tn)

Данная теорема позволяет определять последовательность строк   
Туэ-Морса следующим образом: T0=a, Tn+1=Tnφ(Tn).

**Задание:**

1. Написать программу генерации строки Tn по заданному n на основе  
   а) определения;

б) свойства получения следующей строки.